UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA
DEPARTAMENTO ACADÉMICO DE CIENCIAS BÁSICAS

P.A.: 2025-3
Fecha: *03/02/26*
Horario: *20:00-21:50*

EXAMEN PARCIAL
DE METODOS NUMÉRICOS (MB536)

Responsables de la elaboración: Robert Castro Salguero

APELLIDOS NOMBRES: ____

CODIGO UNI: ______________________ **SECCION:** ______________________

NOTA DEL EXAMEN			
	NUMEROS	**LETRAS**	**Firma del Docente**

INDICACIONES:

- **Duración del examen**: 110 minutos.
- **Material permitido:** Se pueden utilizar **calculadoras científicas** no programables y **sin acceso a internet.**
- **Presentación de respuestas:** Escriba sus respuestas de forma clara y ordenada. Asegúrate de que **cada paso de tu razonamiento y cálculo esté debidamente justificado**. Las respuestas sin justificación no serán calificadas, aunque el resultado sea correcto.

PREGUNTA N°01. (1P)

Sea el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 2 & \propto -1 \\ \alpha + 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Determine para que valores de $\propto$ es sistema presenta solucion indeterminada:

Solucion:

F2=F2-F1($\alpha + 1)/2$

$$\begin{bmatrix} 2 & \propto -1 \\ 0 & \dfrac{9 - \propto^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 - \propto \end{bmatrix}$$

Para solucion indeterminada se requiere que R(A)=R(Ab)=1
$es\ decir$: $9 - \propto^2 = 0$ y $2 - \propto = 0$. **No existe ningún valor de** $\propto$ para que el sistema tenga solucion indeterminada.
Si $\propto = \pm 3$, el sistema presenta solucion absurda, y si $\propto \neq \pm 3$ tendremos solucion única.

PREGUNTA N°02. (1P)
Un sistema hipotético de punto flotante basado en el estándar IEEE-754 maneja un total de 8 bits, de los cuales 3 están destinados a la mantisa. Se pide determinar:

a) El mayor número positivo no normalizado, mostrando sus 8 bits y su correspondiente equivalente decimal.
b) Muestre el almacenamiento de 8 bits del número -16.125 y su error de almacenamiento.

Solución

a) No Normalizado

k=4

bias=2^(k-1)-1=7

ExSN=-(bias-1)

$x=(-1)^{(s)}$*0.m1m2m3*2^(-6)

$x=(-1)^{(0)}$*0.111*2^(-6) = $2^{-7}+2^{-8}+2^{-9}$=0.01367

0 0000 111

b) Normalizado

x=(-1)(s)*1.m1m2m3*2^(Ei-7)

x=-10000.001=-1.0000001*2^4

Ei-7=4 Ei=11=1011

Normalizado: fl(x)=$(-1)^{(1)}$*(1.000)*2^4=-16

1 01011 000

Error absoluto de almacenamiento = 0.125

Error relativo de almacenamiento = 0.775%

PREGUNTA N°03. (1P)

Complete el siguiente script en Matlab, para analizar la convergencia del Método de Sobre relajación sucesiva SOR, de un sistema Ax=b:

```
D=diag(diag(A))
L=-tril(A)+D
U=-triu(A)+D
w=input('Ingrese w=')
Tw=(D-w*L)^-1*((1-w)*D+w*U)
rhow=max(abs(eig(Tw)))  % Radio espectral
if rhow<1
    disp('SOR convergente!!')
else
    disp('SOR divergente!!')
end
```

PREGUNTA N°04. (1P)

a) Dada la Matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$ y el vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine el valor de δ, para que v sea un auto vector de la matriz A.

b) Realice 02 iteraciones del método de la potencia inversa a partir del vector $[1\ 1]^T$ y muestre el error

Solución

(a)

$$Av = \lambda v \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 2\delta \end{bmatrix} = \delta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad 7 = \delta \qquad 2\cancel{\delta} = 2\cancel{\delta}$$

b) Potencia inversa:

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3/7 \\ 0 & 1/7 \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B x^{(0)} = \mu^{(1)} x^{(1)}$$

it = 1

$$\begin{pmatrix} 4/7 \\ 1/7 \end{pmatrix} = \frac{4}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda^{(1)} = \frac{1}{\mu^{(1)}} = \frac{7}{4} = 1.75$$

it = 2

$$B x^{(1)} = \mu^{(2)} x^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/7 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/28 \\ 1/28 \end{pmatrix} = \frac{25}{28}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/25 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda^{(2)} = \frac{1}{\mu^{(2)}} = \frac{28}{25} \doteq 1.12$$

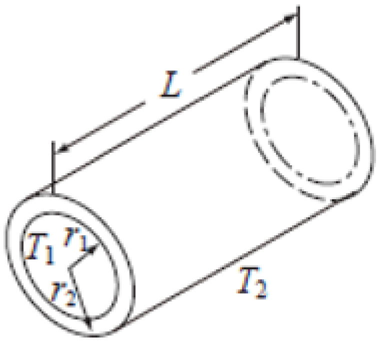
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.04 \end{pmatrix} \qquad \lambda \simeq 1.12$$

$$\delta = \frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty}{\|x^{(2)}\|_\infty} = 0{,}21\ (21\%)$$

PROBLEMA 1 (4P)

El flujo de calor en estado estable en una tubería puede ser determinado por:

$$q = 2\pi L k \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$



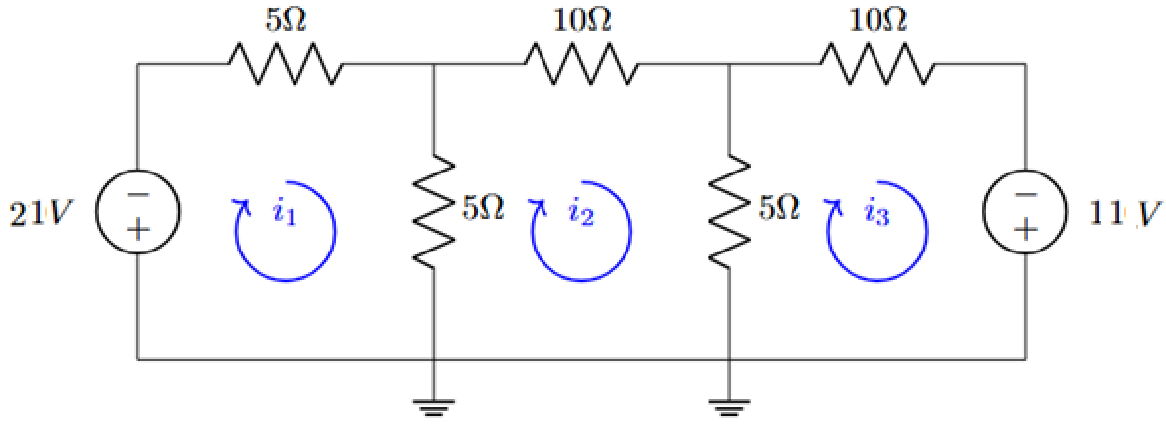
Se desea calcular q (Watts) para una tubería de cobre, donde k=401 W/(m.K) es la conductividad térmica del material evaluado con una precisión es de 0.01, de longitud 0.30011 m≤L≤ 0.30016 m con un radio exterior de 0.05 m, un radio interior de 0.04 m. La temperatura externa de T2=293 °K y la temperatura interna es T1=373 °K. Los radios se midieron con una precisión de 0.1% y las temperaturas se midieron con una precisión de 0.2%. Considere $\pi = 3.142$, aproximado a 3 cifras decimales exactas, mediante propagación de errores multivariable, estime:

a) **(0.5 P)** q en Watts
b) **(2.0 P)** El error absoluto y relativo de q
c) **(0,5 P)** El rango de variación de q. Comente sus resultados.
d) **(1.0 P)** El error permisible en la medición del radio exterior si se desea que el flujo de calor q no exceda el error de 0.5%.

Solución

a)
q = 2.711457e+05 W = 271145.7 W
b)
L = 0.300135
p=3.142
ep =5.e-04 eL =2.5e-05 ek =0.01
eT1 =0.746 eT2 =0.586 er1 =4e-05 er2 =5e-05
dq_dp = 8.6297e+04
dq_dk = 676.1740
dq_dL = 9.0341e+05
dq_dT1 = 3.3893e+03
dq_dT2 = -3.3893e+03
dq_dr2 = -2.4302e+07
dq_dr1 = 3.0378e+07
eq=|dq_dp|ep+|dq_dL|eL+|dq_dk|ek+|dq_dT1|eT1+|dq_dT2|eT2+|dq_dr2|er2+|dq_dr1|er1
eq =7.0173e+03 (2.588%)
c)
Rango_q = 1.0e+05 *[2.6413 2.7816]
Err_permisible_q =0.005*q=1.3557e+03
e_abs_perm_r2 = Err_permisible_q /(7*|dq_dr2|)=7.9694e-06 (0.016%)

PROBLEMA 2 (4P)



Se tiene un circuito eléctrico de corriente continua con 3 mallas mostrado en la figura. Aplicando la Ley de Voltajes de Kirchhoff, se sabe que la suma de caídas de voltaje en cada malla es igual a la fuente de voltaje suministrada.

a) **(0.5 Pto)** Demostrar que el sistema lineal que representa el equilibrio de voltajes en el circuito, ordenado en la forma $Ax = b$, es:

$$\begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

b) **(1.0 Pto)** Analice el condicionamiento del sistema, cuantas cifras significativas exactas se espera tener, si usamos en nuestros cálculos 8 cifras significativas.

c) **(0.5 Pto)** Verifique si es posible aplicar la factorización de Cholessky.

d) **(1.0 Pto)** Realice la factorización de Cholessky si es posible, Crout en caso contrario.

e) **(1.0 Pto)** Determine las corrientes i_1, i_2 e i_3 y comente sus resultados.

Solución

a)
Aplicando la Ley de Voltajes de Kichhoff
$10\,I_1 - 5\,I_2 = -21$
$20\,I_2 - 5I_1 - 5I3 = 0$
$15\,I_3 - 5\,I_2 = 11$

b)
k=norm(A,Inf)*norm(inv(A),Inf)=4.7371
t=8
s=t-log10(k)
s>=7.32
Como es un entero, se esperan 8 cse por lo que, el sistema está bien condicionado

c)
Verificar la aplicabilidad de Cholessky
d1=det(A(1:1,1:1)) % 10
d2=det(A(1:2,1:2)) % 175
d3=det(A(1:3,1:3)) % 2375

como los determinantes de los menores principales son todos positivos, la matriz es definida positiva. A acorde al Teorema de Silvester como es simétrica y definida positiva es posible aplicar Cholessky

d)
Aplicando Cholesky: $A=L*U=L*U^T=U^T*U$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3.1623 & -1.5811 & 0 \\ 0 & 4.1833 & -1.1952 \\ 0 & 0 & 3.6839 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 3.1623 & 0 & 0 \\ -1.5811 & 4.1833 & 0 \\ 0 & -1.1952 & 3.6839 \end{bmatrix}$$

e)
Resolviendo los sistemas triangulares:
L*z=b, por sustitución directa

$$\begin{bmatrix} 3.1623 & 0 & 0 \\ -1.5811 & 4.1833 & 0 \\ 0 & -1.1952 & 3.6839 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.6408 \\ -2.5100 \\ 2.1716 \end{bmatrix}$$

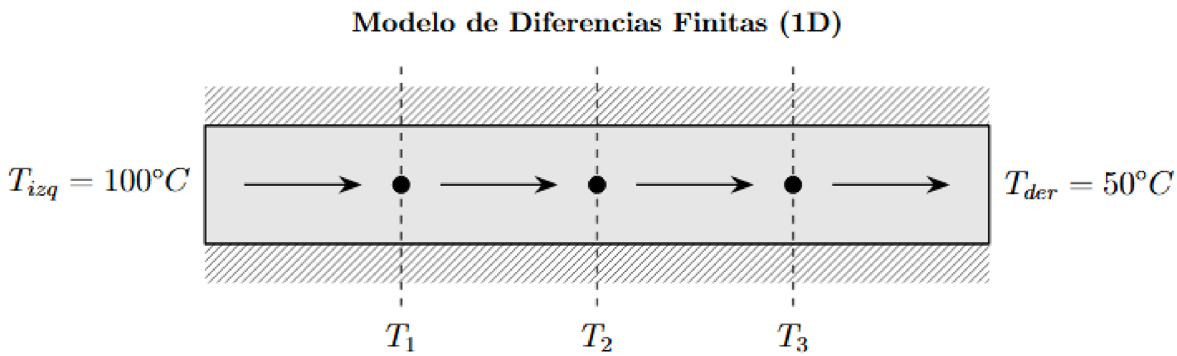
U*x=z, por sustitución inversa

$$\begin{bmatrix} 3.1623 & -1.5811 & 0 \\ 0 & 4.1833 & -1.1952 \\ 0 & 0 & 3.6839 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.6408 \\ -2.5100 \\ 2.1716 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.3158 \\ -0.4316 \\ 0.5895 \end{bmatrix}$$

Las corrientes I_1 e I_2 son opuestas a lo indicado en el diagrama, es decir su sentido correcto es anti-horario.

PROBLEMA3 (4P)



Considere una varilla metálica aislada sometida a conducción de calor unidimensional. La varilla se discretiza en 3 nodos internos (T_1, T_2, T_3) equiespaciados. Los extremos de la varilla se mantienen a temperaturas constantes: $T_{izq} = 100°C$ y $T_{der} = 50°C$.

Usando el método de diferencias finitas, el balance térmico para un nodo interior i establece que $-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1} = 0$. Se plantea una solución iterativa mediante Gauss-Seidel.

a) **(0.5 P)** Plantee las ecuaciones para cada uno de los 3 nodos internos y demuestre que el sistema matricial resultante, incorporando las condiciones de frontera en el vector $\boldsymbol{b}$, es:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}$$

b) **(0.5 P)** Analice la convergencia por el criterio de la diagonal estrictamente dominante.

c) **(1.5 P)** Analice la convergencia por el criterio del radio espectral.

d) **(1.5 P)** Realice 03 iteraciones partiendo de un vector inicial $[100,75,50]^T$ y estime el error relativo en cada iteración. Los resultados son coherentes con lo obtenido en b) y c).?

Solución

a)

$$-T_0 + 2T_1 - T_2 = 0$$
$$-T_1 + 2T_2 - T_3 = 0$$
$$-T_2 + 2T_3 - T_4 = 0$$
$$T_0 = 100$$
$$T_4 = 50$$

b)

|2|>|-1|+|0| (V)

|2|>|-1|+|-1| (F)

|2|>|-1|+|0| (V)

No tiene diagonal estrictamente dominante por lo que no se puede afirmar nada acerca de la convergencia de Gauss-Seidel.

c)

$$D=\begin{matrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{matrix}$$

$$L=\begin{matrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}$$

$$U=\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}$$

$Tg =(D-L)^{-1}U$

$$\begin{matrix}0 & 0.5000 & 0\\ 0 & 0.2500 & 0.5000\\ 0 & 0.1250 & 0.2500\end{matrix}$$

rho = 0.5000<1

La convergencia es segura para Gauss-Seidel, desde cualquier vector inicial.

d)

$X^{(n+1)}=Tg*X^{(n)}+Cg$

$e(n+1)= ||X^{(n+1)} - X^{(n)}||_{\infty} / ||X^{(n+1)}||_{\infty}$

Cg = [50 25 37.5]^T

x0 = [100 75 50]^T

x1 = [87.5 68.75 59.375]^T

err = 14.2857%

x2 = [84.3750 71.8750 60.9375]^T

err = 3.7037%

x1 = [85.9375 73.4375 61.7188]^T

err = 1.8182%

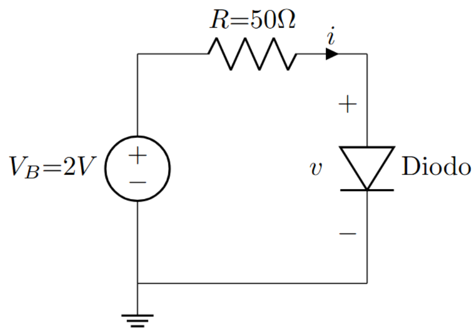
Como el error decrece en cada iteración, podemos afirmar que el método planteado es convergente y esta acorde a lo concluido en b) y c).

PROBLEMA4 (4P)

Considere el circuito en serie formado por una fuente de voltaje $V_B = 2.0\,Volt.$, una resistencia $R = 50\,\Omega$ y un diodo de silicio. El diodo se modela mediante la ecuación:

$$i = I_s(e^{\alpha v} - 1)$$

donde i es la corriente del circuito, v es el voltaje en el diodo, $I_s = 10^{-10}$ Amp. es la corriente de saturación y $\alpha = q/(kT) \approx 40\,Volt^{-1}$. Por la Ley de Voltajes de Kirchhoff se cumple: $V_B = iR + v$v



(a) **(0.5 P)** Plantee la ecuación no lineal en términos del voltaje del diodo *v*,
(b) **(1.0 P)** Localice la raíz aplicando el teorema de Bolzano teniendo en cuenta los siguientes intervalos candidatos: v=0.1, 0.2, 0.3, 0.4 y 0.5.
(c) **(1.0 P)** Realice 2 iteraciones de bisección paso a paso, a partir del intervalo encontrado en b) y estime el error.
(d) **(1.5 P)** Aplique paso a paso 2 iteraciones de Newton Raphson, estime el error relativo porcentual en cada iteración.

Solución

(a) F(v)=2-0.5*10-8*exp(40*v-1)-v

(b) Tabulando:

v	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
F(v)	1.9	1.8	1.6992	1.5556	-0.9258

Bolzano: F(0.4)*F(0.5)<0 y F continua, por lo tanto existe por lo menos una raíz en [0.4,0.5]

(c) Bisección

```
xr=(xi+xs)/2
Si f(xi)*f(xr)<0
     Xs=xr
sino
     Xi=xr
fin
err=(xs-xi)/2
```

It.	xi	xr	xs	err
0	0.4	0.45	0.5	0.05
1	0.45	0.475	0.5	0.025
2	0.475	0.4875	0.5	0.0125

$xr^{(2)}$=0.4875

(d) Newton

F'(v)=-2*10^-7*exp(40*v-1)-1

v0=0.4875

v1=v0-F(v0)/F'(v0)

v1 = 0.4881877153

err_abs = abs(v1-v0)=6.877153e-04 (0.14%)

v2 = 0.4881785789

err_abs = 9.136e-06 (0.00188 %)